Cambio arbitrario del factor de acoplamiento en un sistema de tanques paralelos

A. Garcés D. A., J. L. Orozco M., E. Ruiz-Beltrán
Instituto de Tecnológico de Aguascalientes.
Departamento de Eléctrica y Electrónica.
Departamento de Sistemas y Computación
Aguascalientes, Ags México.
mcieg03150270@mail.ita.mx, drorozco@mail.ita.mx, eruiz@mail.ita.mx
Teléfono/Fax: + (52 449) 910-5002 Ext. 106

***Resumen*—En este trabajo se presenta la metodología para la obtención del grado de acoplamiento en un sistema de nivel de liquido de dos tanques paralelos con dos entradas y dos salidas, a través del método de Bristol-Shinskey. El cual realiza un análisis en las variables manipuladas y en las variables controladas, obteniendo así una matriz de ganancias relativas (Relative Gain Array o (RGA)). Este método propone que se puede reducir el grado de acoplamiento pero no describe de qué manera se puede elegir arbitrariamente. Por lo tanto, en este artículo se propone un método para elegir arbitrariamente el grado de acoplamiento y con éste poder variar su comportamiento de acuerdo a las especificaciones de desempeño que establece el ingeniero de control. Para mostrar la metodología propuesta se aplica a un sistema de tanques paralelos los cuales tienen dos entradas de flujo de agua controladas por válvulas (una para cada tanque) y dos salidas, siendo estas el nivel en cada uno de los tanques.**

Palabras clave: MIMO, acoplamiento, algoritmo de control, control de nivel.

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de control automático han desempeñado un papel vital en el avance de la ciencia y de la ingeniería; en donde generalmente involucran varios componentes interconectados para llevar a cabo un objetivo particular de control. Estos se pueden modelar matemáticamente para estudiar su comportamiento en situaciones difíciles de observar en la realidad, sin tener que realizar pruebas físicas que pudieran ser costosas o peligrosas.

Los sistemas de control según su naturaleza se clasifican en variantes e invariantes en el tiempo y suelen subclasificarse en sistemas regulares (mismo número de entradas y de salidas) y no regulares (diferente número de entradas que de salidas). En estos tipos de sistemas multivariables encontramos un efecto muy interesante llamado "acoplamiento", el cual es la interacción que existe entre cada entrada a cada una de las salidas. El acoplamiento en los sistemas de control es muy importante para lograr los objetivos de control ya que representa el grado de reacción de las salidas del sistema al modificar una de sus entradas.

Por ejemplo en los sistemas de refrigeración industrial existen muchas variables acopladas, como la presión y el flujo del refrigerante, siendo éstas las principales para desarrollar un ciclo de refrigeración simple. Este ciclo tiene varias etapas; comenzando con el tanque de almacenamiento del líquido refrigerante acoplado enseguida a la etapa de evaporización y esta a su vez acoplada a la etapa de compresión, y por último a la etapa de condensación. Si ocurre un cambio no deseado en las entradas de cualquier etapa, por ejemplo en el evaporador, afectará una o varias de sus salidas y al estar acopladas con la siguiente etapa, estas salidas se convierten en entradas para la etapa de compresión, haciendo una afectación en cadena en todo el ciclo de refrigeración; en consecuencia para un sistema de refrigeración puede estar expuesto a presiones y flujos no deseados, pudiendo causar fugas y explosiones, creando accidentes al personal que labore en la planta.

El grado de acoplamiento de los sistemas multivariables regulares se puede calcular mediante el método de Bristol-Shinskey, (Edgar H.Bristol, 1965), (Liu Chen Hui, 1983), (F.G.Shinskey, 1996) o (Smith y Corripio, 2004). Este procedimiento matemático nos indica el grado o factor con el cual el sistema esta acoplado, también ellos muestran cómo reducir el acoplamiento a través del cambio de sus entradas; pero no describe como elegirlo de manera arbitraria según las necesidades del ingeniero de control. En el caso especial de que el grado de acoplamiento dependa de una entrada y una salida se le conocerá como desacoplamiento (Falb and Wolovich, 1967).

En este artículo estudiaremos los sistemas de control invariantes en el tiempo y en el caso regular, proponiendo un método para cambiar el grado de acoplamiento de manera arbitraria en un sistema de nivel de líquido de tanques paralelos con dos entradas y dos salidas.

II. MÉTODO DE BRISTOL-SHINSKEY APLICADO AL SISTEMA PROPUESTO

En esta sección se tiene como objetivo mostrar el método de Bristol-Shinskey aplicado a un sistema de nivel de líquido de dos tanques paralelos con dos entradas y dos salidas, y así obtener el grado de acoplamiento.

Para aplicar el método se necesita el modelo matemático representado en matriz de transferencia del sistema de tanques paralelos (Katsuhiko Ogata, 1998). El sistema se muestra en la figura 1.

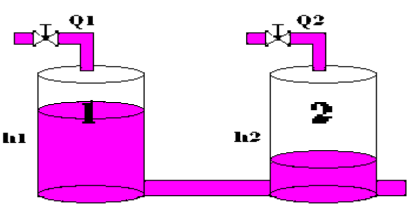

Figura 1. Sistema de tanques paralelos.

El sistema de nivel de líquido de tanques paralelos está compuesto por dos entradas y dos salidas. Como se puede observar las entradas son el flujo de agua a través de las válvulas Q1 y Q2 y sus salidas serán los niveles h1 y h2; acopladas mediante un tubo. El modelo matemático en matriz de transferencia de acuerdo a la referencia (Katsuhiko Ogata, 1998) es que se presenta en la ecuación 1.

$$T(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{10s+2}{100s^2+30s+1} & \dfrac{1}{100s^2+30s+1} \\ \dfrac{1}{100s^2+30s+1} & \dfrac{10s+1}{100s^2+30s+1} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Para estudiar el comportamiento del sistema en estado estacionario se le aplica a la ecuación (1) el teorema del valor final, en donde se analiza el comportamiento del sistema cuando s=0; por lo tanto tenemos la ecuación (2).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2}$$

Reescribiendo la ecuación (2) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2u_1 + u_2 \\ y_1 &= u_1 + u_2 \end{aligned} \tag{3}$$

El método de Bristol-Shinskey se aplica a partir de la ecuación (3) y nos llevará a la obtención de una matriz de ganancias relativas y con esta matriz se podrá determinar cómo cada entrada afecta las salidas.

El primer elemento de la matriz de ganancias relativas es λ_{11} el cual nos da la relación de acoplamiento de la entrada uno a la salida uno y se obtiene como en la ecuación (4). Para esta ganancia relativa se asume que u_2 se mantiene constante a un cambio en la variable u_1 de magnitud Δy_1; (que es la derivada de y_1), con esto se obtiene el numerador de la ganancia λ_{11}, ahora mantenemos la salida y_2 constante y se debe de obtener la razón de cambio de y_1 con respecto a u1, y este valor nos dará el denominador de la ecuación (4).

$$\lambda_{11} = \frac{\left.\dfrac{\partial y_1}{\partial u_1}\right|_{u_2}}{\left.\dfrac{\partial y_1}{\partial u_1}\right|_{y_2}} \tag{4}$$

Donde λ_{11} en la ecuación (4), es un número adimensional denominado ganancia relativa de la salida y_1 a la entrada u_1.

El resto de los elementos de la RGA se definen como (Liu Chen Hui, 1983):

$$\lambda_{12} = \frac{\left.\dfrac{\partial y_1}{\partial u_2}\right|_{u1}}{\left.\dfrac{\partial y_1}{\partial u_2}\right|_{y_2}} \tag{5}$$

$$\lambda_{21} = \frac{\left.\dfrac{\partial y_2}{\partial u_1}\right|_{u2}}{\left.\dfrac{\partial y_2}{\partial u_1}\right|_{y_1}} \tag{6}$$

$$\lambda_{22} = \frac{\left.\dfrac{\partial y_2}{\partial u_2}\right|_{u1}}{\left.\dfrac{\partial y_2}{\partial u_2}\right|_{y_1}} \tag{7}$$

Los subíndices indican qué entrada y salida se está considerando para el análisis. Representando de forma matricial las ecuaciones (4), (5), (6) y (7) se construye la Matriz de Ganancias Relativas (Relative Gain Array-RGA), tal y como se muestra en la ecuación (8).

$$\Delta = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Aplicando las ecuaciones (4), (5), (6) y (7) al sistema de nivel de líquido de dos tanques paralelos de la figura 1 y considerando la ecuación (3), se obtienen las ganancias relativas del sistema, las cuales se presentan a continuación.

$$\lambda_{11} = \frac{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\right|_{u_2}}{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\right|_{y_2}} = \frac{2}{1} = 2 \qquad (9)$$

$$\lambda_{12} = \frac{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_2}\right|_{u1}}{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_2}\right|_{y_2}} = \frac{1}{-1} = -1 \qquad (10)$$

$$\lambda_{21} = \frac{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_1}\right|_{u2}}{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_1}\right|_{y_1}} = \frac{1}{-1} = -1 \qquad (11)$$

$$\lambda_{22} = \frac{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right|_{u1}}{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right|_{y_1}} = \frac{1}{0.5} = 2 \qquad (12)$$

Teniendo todos los elementos λ, se construye la Matriz de Ganancias Relativas como se muestra en la ecuación (13).

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

En la RGA observamos acoplamientos en donde cada elemento tiene un significado. A continuación se listan los diferentes valores que puede tomar una RGA.

a) Si encontramos un valor con $\lambda_{ij}=0$, no existe relación entre la variable manipulada j y la variable controlada i.

b) Si encontramos un valor con $\lambda_{ij}=1$, no hay interacción con otros lazos.

c) Si encontramos un valor con $0<\lambda_{ij}<1$, quiere decir que existe alguna interacción, es decir un cambio en una variable manipulada alterará las otras variables controladas.

d) Si encontramos un valor con $\lambda_{ij}<0$, indica que se tendrán respuestas dinámicas lentas y malas, con lo que esta interacción obliga a la variable controlada a responder en dirección opuesta respecto a la respuesta directa. Como resultado, la variable controlada se mueve en una dirección y después en mayor cantidad en dirección opuesta.

e) Si encontramos un valor con $\lambda_{ij}=\infty$, indica que no se pueden controlar ambas variables al mismo tiempo.

III. MÉTODO PROPUESTO PARA LA ELECCIÓN ARBITRARIA DEL GRADO DE ACOPLAMIENTO APLICÁNDOLO AL SISTEMA EN ESTUDIO

En esta sección se muestra el método propuesto que realiza el cambio de grado de acoplamiento de manera arbitraria para el sistema de nivel de líquido de tanques paralelos con dos entradas y dos salidas.

Se parte del análisis en estado estacionario de un sistema de 2x2, el cual se obtiene aplicando el teorema de valor final cuando s=0, por lo tanto tendremos un sistema descrito de forma general mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_1 &= Au_1 + Bu_2 \\ y_2 &= Cu_1 + Du_2 \end{aligned} \qquad (14)$$

Considerando la ecuación (14), las ganancias relativas (4), (5), (6) y (7) son:

$$\lambda_{11} = \frac{A}{\left(A - \frac{BC}{D}\right)} = \frac{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\right|_{u_2}}{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\right|_{y_2}} \qquad (15)$$

$$\lambda_{12} = \frac{B}{\left(B - \frac{AD}{C}\right)} = \frac{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_2}\right|_{u1}}{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_2}\right|_{y_2}} \qquad (16)$$

$$\lambda_{21} = \frac{C}{\left(C - \frac{DA}{B}\right)} = \frac{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_1}\right|_{u2}}{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_1}\right|_{y_1}} \qquad (17)$$

$$\lambda_{22} = \frac{D}{\left(D - \frac{CB}{A}\right)} = \frac{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right|_{u1}}{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right|_{y_1}} \qquad (18)$$

Reescribiendo las ecuaciones (15), (16), (17) y (18) se obtiene que de forma general para un sistema de 2x2 la matriz de ganancias relativas que se muestra en la ecuación (19).

$$\Delta_p = \begin{bmatrix} \dfrac{AD}{AD-BC} = x & \dfrac{BC}{BC-AD} = y \\ \dfrac{BC}{BC-AD} = w & \dfrac{AD}{AD-BC} = z \end{bmatrix} \tag{19}$$

Donde se definen las variables x, y, w y z para indicar los valores del grado de acoplamiento que se deseen proponer y los elementos de esta matriz de la ecuación (19) se pueden reescribir como (20), (21), (22) y (23).

$$A = \frac{-xBC}{(D - xD)} \tag{20}$$

$$B = \frac{-yAD}{(C - yC)} \tag{21}$$

$$C = \frac{-wAD}{(B - wB)} \tag{22}$$

$$D = \frac{-zBC}{(A - zA)} \tag{23}$$

En donde se observa que los elementos de la ecuación (14) están en función de las ganancias relativas propuestas.

Posteriormente, se propone el grado de acoplamiento que se desea tener en el sistema. En el ejemplo de los tanques en paralelo se tenía una matriz de ganancias relativas como en la ecuación (13) y se propone de forma arbitraria que ésta cambie como se muestra en la ecuación (24). Es decir en la ecuación (13) la salida uno dependía en mayor medida de la entrada uno y ahora en la ecuación (24) se está buscando que la salida uno se vea mayormente afectada por la entrada dos.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \tag{24}$$

En la ecuación (20) se sustituye ***x*** con el valor de 0.3 y se propone como solución B=C=D=1, siendo este el elemento λ_{11} de (15):

$$A = \frac{-xBC}{(D - xD)} = \frac{-(0.3)(1)(1)}{1-(0.3)(1)} = -0.42857 \tag{25}$$

Reescribiendo la ecuación (14) ya con el nuevo valor de A, B, C y D se obtiene la ecuación (26).

$$\begin{aligned} y_1 &= -0.42857u_1 + u_2 \\ y_2 &= u_1 + u_2 \end{aligned} \tag{26}$$

Representando de manera matricial la ecuación (26) se tiene la matriz de la ecuación (27) la cual llamaremos $M_{propuesta}$.

$$M_{propuesta} = \begin{bmatrix} -0.42857 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

La respuesta en estado estacionario del sistema de tanques es la ecuación (2) la cual definiremos como:

$$M_{original} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Se propone que existe un controlador ***C*** tal que relaciona las ecuaciones (27) y (28):

$$C = \left[M_{original}\right]^{-1} * \left[M_{propuesta}\right] \tag{29}$$

Por lo tanto:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} -0.42857 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1.42857 & 0 \\ 2.42857 & 1 \end{bmatrix}$$

Se propone que este controlador se aplique al sistema original de la ecuación (1), como un compensador tal como se representa en la ecuación (30).

$$T_{\text{modificado}}(s) = [T(s)] * [C] \tag{30}$$

En donde se tiene que:

$$T_{\text{modificado}}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{-14.2857s - 0.42857}{100s^2 + 30s + 1} & \dfrac{1}{100s^2 + 30s + 1} \\ \dfrac{24.2857s + 1}{100s^2 + 30s + 1} & \dfrac{10s + 1}{100s^2 + 30s + 1} \end{bmatrix} \tag{31}$$

La ecuación (31) tiene la modificación del grado de acoplamiento y para demostrarlo se aplica el método de Bristol-Shinskey. El cual parte de la respuesta en estado estacionario s=0 de la ecuación (31), que satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_1 &= -0.42857u_1 + u_2 \\ y_2 &= u_1 + u_2 \end{aligned} \tag{32}$$

Es importante resaltar que la ecuación (32) es igual a la ecuación (26). Ahora, verificando los grados relativos correspondientes a la ecuación (32) se tiene que:

$$\lambda_{11} = \frac{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\right|_{u_2}}{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_1}\right|_{y_2}} = \frac{-0.42857}{-1.42857} = 0.3 \tag{33}$$

$$\lambda_{12} = \frac{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_2}\right|_{u1}}{\left.\frac{\partial y_1}{\partial u_2}\right|_{y_2}} = \frac{1}{1.42} = 0.7 \tag{34}$$

$$\lambda_{21} = \frac{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_1}\right|_{u2}}{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_1}\right|_{y_1}} = \frac{1}{1.42} = 0.7 \tag{35}$$

$$\lambda_{22} = \frac{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right|_{u1}}{\left.\frac{\partial y_2}{\partial u_2}\right|_{y_1}} = \frac{1}{3.347} = 0.3 \tag{36}$$

Representado estos grados relativos en forma matricial se tiene la siguiente matriz de ganancias relativas del sistema modificado, como se muestra en (37).

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Finalmente, se puede observar que el sistema sí modificó el grado de acoplamiento mostrado en la ecuación (13) al propuesto en la ecuación (24) a través de un controlador de la forma de la ecuación (29).

IV. Conclusiones

El método propuesto aporta la manera de modificar el grado de acoplamiento de manera arbitraria para un sistema de dos entradas y dos salidas, y así tener la libertad de elegir la interacción de las entradas con las salidas. La ventaja que ofrece la manipulación de este acoplamiento, es que se puede elegir la interacción entre las entradas y salidas en procesos donde los acoplamientos afectan el desempeño del sistema tal como en sistemas de refrigeración, en columnas de destilación, etc.

V. Agradecimientos

Este articulo se realizo gracias al apoyo del Instituto Tecnológico de Aguascalientes y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT).

Referencias

Katsuhiko Ogata, (1998). Ingeniería de Control Moderna. Pearson prentice hall, Tercera edicion. México.

Liu Chen Hui, (1983). Lectures notes in control and information sciences; Edited by A.V. Balakrishnan and M. Thomas. Germany.

F.G.Shinskey, (1996); Sistemas de control de procesos, McGraw-Hill. México.

Peter L. Falb and William A. Wolovich, (1967). Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems. Articulo IEEE transactions on automatic control. Cambridge, Mass.

Edgar H.Bristol, (1965). On a New Measure of Interaction for Multivariable Process Control; Foxboro Company; Foxboro, Mass.

(Smith y Corripio, 2004). Control Automático de procesos. Teoría y práctica. Editorial Limusa. México.